

一类非线性奇异抛物方程解的渐进行为*

刘 强^{1,2}, 张立卫¹

(1. 大连理工大学数学学院, 辽宁 大连 116024;
2. 大连民族学院理学院, 辽宁 大连 116600)

摘要: 利用紧致方法和先验估计技巧, 研究了一类奇异非线性抛物方程的弱解当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 和 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时的渐进行为 (其中 λ 为方程中的一个参数), 并且建立了解的收敛率。揭示了所论方程与发展型 p -Laplace 方程之间的深刻联系。

关键词: 奇异抛物方程; 弱解; 渐进行为; 收敛率

中图分类号: O175.2 文献标志码: A 文章编号: 0529-6579 (2015) 02-0055-04

Asymptotic Behaviors of Solutions for a Nonlinear Singular Parabolic Equation

LIU Qiang^{1,2}, ZHANG Liwei¹

(1. School of Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. School of Science, Dalian Nationalities University, Dalian 116600, China)

Abstract: By compactness argument and a priori estimate technique, the asymptotic behaviors of solutions, as $\lambda \rightarrow 0^+$ and $\lambda \rightarrow +\infty$ respectively, for a nonlinear singular parabolic equation are studied, where λ is a parameter of this equation. And the convergence rates of solutions are established. A deep relation between the equation considered here and the evolutionary p -Laplace equation is revealed.

Key words: singular parabolic equation; weak solution; asymptotic behavior; convergence rate

研究如下非线性奇异抛物方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} u_t - (|u_x|^{p-2}u_x)_x = f(x,t) - \lambda u^m |u_x|^p, \\ u > 0, (x,t) \in Q_T \\ u(x,0) = u_0(x), x \in I \\ u(b,t) = u(a,t) = 0, t \in (0,T) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $p > 2, \lambda > 0, m < 0, T > 0, Q_T = I \times (0, T), I = (a, b), f(x, t)$ 是定义在 Q_T 上的一个可测函数。

当 $m < 0$ 时, 上述方程在使 $u = 0$ 的点处出现奇性。另一方面, 由于当 $p > 2$ 时上述方程在使 $u_x = 0$ 的点处发生退化, 因此一般而言问题 (1) 没有经典解。本文考虑问题 (1) 的弱解, 其定义如下:

定义 1 称非负函数 $u \in V^T$ 为问题 (1) 的一

个弱解, 如果 $u > 0$ a. e. 于 $Q_T, u^m |u_x|^p \in L^1(Q_T), u_t \in L^2(Q_T)$, 并且

$$\iint_{Q_T} (u_t \psi + |u_x|^{p-2} u_x \psi_x + \lambda u^m |u_x|^p \psi - f(x,t) \psi) dx dt = 0, \forall \psi \in V_0^T$$

其中, $V^T = L^\infty(Q_T) \cap L^p(0, T; W^{1,p}(I)), V_0^T = L^\infty(Q_T) \cap L^p(0, T; W_0^{1,p}(I))$ 。

问题 (1) 包含了许多经典模型。当 $\lambda = 0$ 时, 问题 (1) 为如下发展型 p -Laplace 方程^[1]

$$\begin{cases} u_t - (|u_x|^{p-2}u_x)_x = f(x,t), (x,t) \in Q_T \\ u(x,0) = u_0(x), x \in I \\ u(b,t) = u(a,t) = 0, t \in (0,T) \end{cases} \quad (2)$$

* 收稿日期: 2014-11-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11071029)

作者简介: 刘强 (1979 年生), 男; 研究方向: 运筹学与优化的理论; E-mail: mathliuqiang@163.com

当 $p = 2, m = 1$ 时, 问题 (1) 中的方程为著名的 KPZ 方程^[2]。当 $m \geq -1$ 时, 问题 (1) 中的方程可化为如下非 Newton 多方渗流方程^[1]

$$[G(u)]_t - (|g(u)|^{p-2}[g(u)]_x)_x = [g'(u)]^{p-1}f(x, t)$$

其中

$$g(s) = \begin{cases} \int_0^s \exp\left\{-\frac{\lambda}{1+m}y^{1+m}\right\}dy, m > -1 \\ \frac{s^{1-\sigma}}{1-\sigma}, m = -1, \lambda \neq p-1 \\ \ln s, m = -1, \lambda = p-1 \end{cases}$$

$$G(s) = \int [g'(s)]^{p-1}ds$$

然而, 当 $m < -1$ 时, 问题 (1) 不能化为没有梯度项的方程。

近年来, 有关问题 (1) 的研究已取得一些成果^[3-6], 但主要集中在 $p = 2$ 的情形。当 $p = 2, \lambda > 0, m = -1$ 时, 文献 [3] 讨论了相应高维问题 (1) 的解的存在唯一性以及解当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 和 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时的渐进行为; 当 $p = 2, \lambda = 1$ 时, 文献 [4] 讨论了相应高维问题 (1) 解的存在性 ($-2 < m < 0$) 和唯一性 ($-1 < m < 0$); 当 $p = 2, \lambda > 0, -2 < m \leq -1$ 时, 文献 [5] 证明了问题 (1) 多个解的存在性, 并讨论了解当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 和 $t \rightarrow +\infty$ 时解的渐进行为。当 $p > 2, m \leq -1$ 时, 文献 [6] 证明了问题 (1) 存在弱解的充分必要条件是 $-p < m \leq -1$ 。文献 [6] 还证明了问题 (1) 的最大解 u 满足 $u_x(b, t) = u_x(a, t) = 0$, 而问题 (2) 的解并不具有这个性质, 这反映了两个问题之间的本质区别。本文研究问题 (1) 的解当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 和 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时的渐进行为, 并进一步建立了解的收敛率, 从而揭示了问题 (1) 和问题 (2) 之间的深刻联系。

1 若干结论

基于文献 [6] 中的存在性结果, 本文假设:

- (H1) $p > 2, -p < m \leq -1$;
- (H2) $f(x, t) \in C^{1,1}(\overline{Q_T}); f(x, t) > 0$ 于 $\overline{Q_T}$;
- (H3) $u_0 \in C^{2+\beta}[a, b]; u_{0x}(b) = u_{0x}(a) = u_0(b) = u_0(a) = 0$;

(H4) $((|u_{0x}|^2 + \eta)^{\frac{p-2}{2}}u_{0x})_x - \lambda u_0^m |u_{0x}|^p + f(x, 0) \geq 0$ 几乎处处于 (a, b) 。

文献 [1] 已证明了如下结论。

定理 1 设 (H1) - (H4) 成立, 那么问题 (1) 存在一个最大弱解 $u \in C^{1,1/2}(\overline{Q_T})$ 使得

$$u \geq C\omega^{p/(p+m)} \text{ 于 } \overline{Q_T};$$

$$u_t \geq 0 \text{ 几乎处处于 } Q_T;$$

$$\sup_{Q_T} |u_x| \leq (b-a) \max_{Q_T} f;$$

$$\lambda \sup_{0 < t < T} \int_a^b u^m |u_x|^p dx \leq (b-a) \max_{Q_T} f;$$

$$\iint_{Q_T} u_t^2 dx dt \leq \int_a^b |u_{0x}|^2 dx + (b-a)^3 (\max_{Q_T} f)^2$$

其中 C 为一个正常数, 且当 $\lambda \in (0, 1)$ 时与 λ 无关; ω 为如下问题的唯一经典解

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, u > 0, (x, t) \in Q_T \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in I \\ u(b, t) = u(a, t) = 0, t \in (0, T) \end{cases}$$

本文的第一个结果可叙述如下:

定理 2 假设 $p > 2, -1 \geq m > -p$, 并设 u_λ 是问题 (1) 的一个弱解, 那么当 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时, 有 $u_{\lambda x} \rightarrow 0$ 于 $L^p(Q_T)$ (强收敛)

而且

$$\sup_{0 < t < T} \int_a^b u_\lambda^2 dx + \iint_{Q_T} |u_{\lambda x}|^p dx dt = O(\lambda^{-1})$$

接下来, 研究解当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时的渐进行为。设 (H2) - (H3) 成立, 依据文献 [7], 问题 (2) 存在唯一弱解 $\varphi \in C^{1+\beta, 1/2+\beta/2}(\overline{Q_T})$, 其中 $0 < \beta < 1$, 且满足 $\varphi > 0$ 于 Q_T 。

定理 3 设 (H1) - (H3) 成立, (H4) 当 $\lambda \in (0, 1)$ 时成立, 并设 $u_\lambda \in C^{1,1/2}(\overline{Q_T})$ 为问题 (1) 的最大弱解, 则当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时, 有

$$u_\lambda \rightarrow \varphi \text{ 于 } C(\overline{Q_T}) \text{ (一致收敛);}$$

$$u_{\lambda x} \rightarrow \varphi_x \text{ 于 } L^p(Q_T) \text{ (强收敛);}$$

$$u_{\lambda t} \rightarrow \varphi_t \text{ 于 } L^2(Q_T) \text{ (弱收敛)}$$

此外, 如果 $-p < m < -2p/(p+1)$, 并且存在一个正常数 c 使得

$$u_0(x) \geq c[d(x)]^{p/(p+m)}, \forall x \in [a, b] \quad (3)$$

其中 $d(x) = x - a, \forall x \in [a, (a+b)/2]; d(x) = b - x, \forall x \in [(a+b)/2, b]$, 那么

$$\sup_{0 < t < T} \int_a^b (U - u_\lambda)^2 dx + \iint_{Q_T} |U_x - u_{\lambda x}|^p dx dt = O(\lambda)$$

注: 关于 u_0 的假设 (3) 基于如下事实: 对充分小的正常数, $u_0 = c[d(x)]^{p/(p+m)}$ 满足假设 (H4)。容易验证, 当 $0 < \alpha < p/(p+m)$ 时, 对任何正常数 c , 函数 $u_0 = c[d(x)]^\alpha$ 不满足 (H4)。值得指出的是, 当 $p = 2$ 时, 这个条件是不必要的。然而, 当 $p > 2$ 时, 去掉这个条件是非常困难的。

2 定理的证明

首先证明定理 2。

证明 由于 $-p < m \leq -1, \psi = u_\lambda^{-m}$ 可作为检验函数, 将其代入解的积分等式中, 得

$$\frac{1}{1-m} \int_a^b u_\lambda^{1-m} dx - m \iint_{Q_T} u_\lambda^{-m-1} |u_{\lambda x}|^p dx ds +$$

$$\lambda \iint_{Q_T} |u_{\lambda x}|^2 dx ds = \frac{1}{1-m} \int_a^b u_0^{1-m} dx + \iint_{Q_T} f(x, t) u_\lambda^{-m} dx ds$$

其中, $Q_t = (a, b) \times (0, t), t \in (0, T]$ 。利用 Young 不等式并注意 $-p < m \leq -1$ 得

$$\frac{1}{1-m} \int_a^b u_\lambda^{1-m} dx + \lambda \iint_{Q_T} |u_{\lambda x}|^2 dx ds \leq C + \frac{1}{1-m} \iint_{Q_T} u_\lambda^{1-m} dx dt$$

此处 C 为一个不依赖于 λ 的正常数。最后, 利用 Gronwall 引理得

$$\frac{1}{1-m} \int_a^b u_\lambda^{1-m} dx + \lambda \iint_{Q_T} |u_{\lambda x}|^2 dx ds \leq C$$

定理 2 证毕。

为证明定理 3, 需要利用文献 [6] 中的如下引理。

引理 1 设 $\varphi \in C^1[c, d]$, 那么对任何 $\delta \in (0, (d-c)/2]$ 以及任何 $x \in [c, d]$, 存在 $y \in [c, d]$ 使得 $\delta = |x - y|$, 并且

$$|\varphi(x)| \leq \delta |\varphi'|_{L^\infty(c, d)} + \delta^{-1} \left| \int_x^y \varphi(z) dz \right|$$

首先证明定理 3 的第一部分。依据定理 1, 问题 (1) 的最大解 $u_\lambda \in C^{1, 1/2}(\overline{Q_T})$ 满足

$$u_{\lambda t} \geq 0 \tag{4}$$

$$\sup_{Q_T} |u_{\lambda x}| \leq (b-a) \max_{Q_T} f \tag{5}$$

$$\sup_{0 < t \leq T} \int_a^b \lambda u_\lambda^m |u_{\lambda x}|^p dx \leq (b-a) \max_{Q_T} f \tag{6}$$

$$\iint_{Q_T} u_\lambda^2 dx dt \leq \int_a^b |u_{0x}|^2 dx + (b-a)^3 (\max_{Q_T} f)^2 \tag{7}$$

此外, 利用文献 [6] 中的比较定理可知: $u_\lambda \geq u_{\lambda'}, \forall 0 < \lambda < \lambda' < 1$ 。据此可知, 存在一个非负函数 \bar{U} 使得

$$\bar{U} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} u_\lambda \text{ 于 } \overline{Q_T}$$

从 (5) 式可推知: 存在一个不依赖于 λ 的正常数 C 使得

$$|u_\lambda(x_2, t) - u_\lambda(x_1, t)| \leq C |x_2 - x_1|, \forall x_2, x_1 \in [a, b], t \in [0, T]$$

下面证明

$$|u_\lambda(\cdot, t_2) - u_\lambda(\cdot, t_1)|_{L^\infty(I)} \leq C |t_2 - t_1|^{\frac{1}{3}}, \forall t_2, t_1 \in [0, T] \tag{8}$$

设 $\varphi_\lambda = u(x, t_2) - u(x, t_1)$ 。如果 $|t_2 - t_1|^{\frac{1}{3}} \geq (b$

$-a)/2$, 那么从 (5) 式可知

$$|\varphi_\lambda(x)|_{L^\infty(I)} \leq C(b-a) \leq C |t_2 - t_1|^{\frac{1}{3}} \tag{9}$$

现在假设 $0 < |t_2 - t_1|^{\frac{1}{3}} < (b-a)/2$ 。依引理 1 知, 对 $\delta \in (0, (b-a)/2]$ 以及 $x \in [a, b]$, 存在 $y \in [a, b]$ 使得 $\delta = |x - y|$, 并且

$$|\varphi_\lambda(x)| \leq C\delta + \delta^{-1} \left| \int_x^y \varphi_\lambda(z) dz \right| =$$

$$C\delta + \delta^{-1} \left| \int_x^y \int_{t_1}^{t_2} u_{\lambda t} dt dz \right| \leq$$

$$C\delta + \delta^{-1} \left(\int_x^y \int_{t_1}^{t_2} (u_{\lambda t})^2 dt dz \right)^{1/2} \delta^{1/2} |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}$$

再由 (7) 式, 得

$$\varphi_\lambda(x) \leq C\delta + C\delta^{-\frac{1}{2}} |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}$$

取 $\delta = |t_2 - t_1|^{\frac{1}{3}}$ 立得 (9) 式。结合 (8) 式和 (9) 式可得

$$|u_\lambda(x_2, t_2) - u_\lambda(x_1, t_1)| \leq$$

$$C(|x_2 - x_1| + |t_2 - t_1|^{1/3}), \forall (x_2, t_2), (x_1, t_1) \in \overline{Q_T}$$

利用以上估计以及 Alzela-Ascoli 引理知: 当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时, 有

$$u_\lambda \rightarrow \bar{U} \text{ 于 } C(\overline{Q_T}) \text{ (一致收敛);}$$

$$\bar{U} \geq C\omega^{\frac{p}{p+m}} \text{ 于 } \overline{Q_T}$$

由于 $h_\lambda = f - \lambda u_\lambda^m |u_{\lambda x}|^p$ 是局部一致有界的, 因而利用退化抛物方程解的正则性理论^[7]知: 存在 $\beta \in (0, 1)$ 使得 $u_{\lambda x}$ 在函数空间 $C^{\beta, \frac{\beta}{2}}(Q_T)$ 中是局部一致有界的。于是, 当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时, 有

$$u_\lambda \rightarrow \bar{U} \text{ 于 } C(\overline{Q_T}) \text{ (一致收敛);}$$

$$u_{\lambda x} \rightarrow \bar{U}_x \text{ 于 } C_{loc}^{\beta', \frac{\beta'}{2}}(Q_T) \text{ (一致收敛)}$$

其中 $0 < \beta' < \beta$ 。这表明: \bar{U} 是问题 (2) 的一个弱解, 进而由唯一性知, $\bar{U} = \varphi$ 。

令 $w_\lambda = u_\lambda - \varphi$, 则其满足

$$w_{\lambda t} = (|u_{\lambda x}|^{p-2} u_{\lambda x} - |\varphi_x|^{p-2} \varphi_x)_x + \lambda u_\lambda^m |u_{\lambda x}|^p$$

在上式两端同时乘以 w_λ , 然后在 Q_T 上积分, 并利用 (6) 式得

$$\frac{1}{2} \int_a^b w_\lambda^2(x, T) dx + \iint_{Q_T} (|u_{\lambda x}|^{p-2} u_{\lambda x} - |\varphi_x|^{p-2} \varphi_x) \cdot (u_{\lambda x} - \varphi_x) dx dt = \lambda \iint_{Q_T} u_\lambda^m |u_{\lambda x}|^p \omega_\lambda dx dt \leq$$

$$\lambda \iint_{Q_T} u_\lambda^m |u_{\lambda x}|^p dx dt \sup_{Q_T} |w_\lambda| \leq$$

$$C \sup_{Q_T} |w_\lambda| \rightarrow 0 (\lambda \rightarrow 0^+)$$

然后利用如下不等式^[8]

$$(|\eta|^{p-2} \eta - |\eta'|^{p-2} \eta')(\eta - \eta') \geq$$

$$C_p |\eta - \eta'|^p, \forall \eta, \eta' \in \mathbf{R}$$

立得

$$\iint_{Q_T} |w_{\lambda x}|^p dx dt \rightarrow 0 (\lambda \rightarrow 0^+)$$

证毕。

为证明定理 3 的第二部分, 首先建立如下引理。

引理 2 设定理 3 的假设条件成立, 则

$$\iint_{Q_T} \frac{|u_{\lambda x}|^p}{u_\lambda^\alpha} dx dt \leq \frac{C_\alpha}{1-\alpha}, \forall \alpha \in (0, 1)$$

证明 选取 $\psi = \frac{u_\lambda}{(u_\lambda + \delta)^\alpha} (\delta > 0)$ 作为检验函数, 并代入解的积分等式中, 得

$$\iint_{Q_T} u_{\lambda t} \frac{u_\lambda}{(u_\lambda + \delta)^\alpha} dx dt + \iint_{Q_T} |u_{\lambda x}|^{p-2} u_{\lambda x} \left[\frac{u_\lambda}{(u_\lambda + \delta)^\alpha} \right]_x dx dt =$$

$$-\lambda \iint_{Q_T} u_\lambda^m |u_{\lambda x}|^2 \frac{u_\lambda}{(u_\lambda + \delta)^\alpha} dx dt + \iint_{Q_T} f(x, t) \frac{u_\lambda}{(u_\lambda + \delta)^\alpha} dx dt$$

于是

$$\iint_{Q_T} u_{\lambda t} \frac{u_\lambda}{(u_\lambda + \delta)^\alpha} dx dt + (1 - \alpha) \iint_{Q_T} \frac{|u_{\lambda x}|^p}{(u_\lambda + \delta)^\alpha} dx dt \leq$$

$$-\alpha \delta \iint_{Q_T} \frac{|u_{\lambda x}|^p}{(u_\lambda + \delta)^\alpha} dx dt - \lambda \iint_{Q_T} u_\lambda^m |u_{\lambda x}|^2 \frac{u_\lambda}{(u_\lambda + \delta)^\alpha} dx dt +$$

$$\iint_{Q_T} f(x, t) \frac{u_\lambda}{(u_\lambda + \delta)^\alpha} dx dt \leq$$

$$\iint_{Q_T} f(x, t) \frac{u_\lambda}{(u_\lambda + \delta)^\alpha} dx dt$$

令 $\delta \rightarrow 0$ 得

$$\iint_{Q_T} u_{\lambda t} u_\lambda^{1-\alpha} dx dt + (1 - \alpha) \iint_{Q_T} \frac{|u_{\lambda x}|^p}{u_\lambda^\alpha} dx dt \leq$$

$$\iint_{Q_T} f u_\lambda^{1-\alpha} dx dt$$

所以

$$(1 - \alpha) \iint_{Q_T} \frac{|u_{\lambda x}|^p}{u_\lambda^\alpha} dx dt \leq$$

$$\iint_{Q_T} f u_\lambda^{1-\alpha} dx dt + \frac{1}{2 - \alpha} \int_a^b u_0^{2-\alpha} dx$$

证毕。

最后, 证明定理 3 的第二部分: 由 (4) 式知, $u \geq u_0 \geq c[d(x)]^{p/(p+m)}$ 。由于 $\varphi_x(x, t) \in C(\overline{Q_T})$,

利用微分中值定理定理得 $\varphi \leq Cd(x)$, 故 $\frac{\varphi}{u^{(p+m)/p}} \leq$

C 。由于 $-p < m \leq -2p/(p+1)$, 所以 $0 < [p + (p+1)m]/p < 1$, 故由引理 2 得

$$\iint_{Q_T} w_{\lambda t} w_\lambda dx dt + \iint_{Q_T} |w_{\lambda x}|^p dx dt \leq$$

$$\lambda \iint_{Q_T} u_\lambda^m |u_{\lambda x}|^p w_\lambda dx dt \leq$$

$$\lambda \iint_{Q_T} u_\lambda^m |u_{\lambda x}|^p \varphi dx dt \leq$$

$$C\lambda \iint_{Q_T} u_\lambda^{\frac{[p+(p+1)m]}{p}} |u_{\lambda x}|^p dx dt \leq C\lambda$$

证毕。

参考文献:

- [1] WU Z Q, ZHAO J N, YIN J X, et al. Nonlinear diffusion equations [M]. Singapore: World Scientific, 2001.
- [2] KARDAR M, PARISI G, ZHANG Y. Dynamic scaling of growing interfaces [J]. Physical Review Letters, 1986, 56: 889 - 892.
- [3] XIA L, YAO Z A. Existence, uniqueness and asymptotic behavior of solutions for a singular parabolic equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 358: 182 - 188.
- [4] MARTNEZ-APARICIOA P J, PETITTA F. Parabolic equations with nonlinear singularities [J]. Nonlinear Analysis, TMA, 2011, 74: 114 - 131.
- [5] ZHOU W S, LEI P D. A one-dimensional nonlinear heat equation with a singular term [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 368: 711 - 726.
- [6] ZHOU W S, WEI X D. Some results on a singular parabolic equation in one dimension case [J]. Mathematical Method in Applied Sciences, 2013, 36 (18): 2576 - 2587.
- [7] LIEBERMAN G M. Boundary and initial regularity for solutions of degenerate parabolic equations [J]. Nonlinear Analysis, TMA, 1993, 20(5): 551 - 569.
- [8] DAMASCELLI L. Comparison theorems for some quasi-linear degenerate elliptic operations and applications to symmetry and monotonicity results [J]. Ann Inst Henri Poincare Anal Non Lineaire, 1998, 4 (15): 493 - 516.